因子分析法における因子解とその変換

遠 藤 甚 助*

Factor Solution and ius Transformation in Factor Analysis

*By Zinsuke Endo**

Synopsis: Various methods of solving factor analysis have been developed and there are still many problems about it which have to be discussed.

In this paper, a factor analysis model to give the concepts of fundamental principles of analysis is considered and the two important methods of solution are outlined; the principal factor method and the normal varimax method which includes the transformation of the factor into a simple structure.

要旨： 因子分析にはさまざまな解法があり，また重要な課題も多い。ここでは，その中から，基礎となる因子分析モデルと代表的解法である主因子法ならびに単純構造への変換を施して解を求める規準バリマックス法を取りあげて概説する。

2. まえがき

因子分析法は多変量解析の一領域を占めるもので，1900年代の初めから，心理学における有力な統計的手法として発展し，近年電子計算機が発達普及するにしたがい，心理学ばかりでなく，他の社会科学，自然科学においても広く用いられるようになった。

多変量の間にみられる変動を分析する統計的手法は，外的基準となる変量と関連づけて多変量が分析される場合と，特定の外的基準をもたず，すべての変量が対等の立場におかれ，それらの相互関係が分析される場合とに大別されるが，因子分析法は後者の場合に当るものである。

この分析法のおもな目的をあげるとつぎのようになる。

（i） 多変量によって表わされる変動を，より少数の代表的・仮説的に変動によって説明すること

（ii） 多変量のデータのもつ構造をできるだけ簡潔に記述すること

（iii） 観察対象の個体の分類または類型化

2. 因子分析モデル

2.1 多変量情報の集約

因子分析モデルの数学的説明に入る前に，まずつぎのような問題を考えてみる。ある中学3年の学級の生徒30人の成績記録が表2.1のように与えられたとする。

この成績表の総合成績は，初めの二つの期末テストの平均点をとったものである。このことから，この成績記録には，ある意味で情報が重複して載っているわけで，むだのない形で情報を記録するのであれば，30人の総合成績を記録する代りに，二つの期末テストの成績と，総合成績を算出する規則（二つの期末テストのいずれにも0.5を乗じてその和をとるということ）とを明らかにしておけばよい。

そこで，この成績表を表わす行列から，総合成績を除いた30×3の大きさの行列を考えると，この行列から元の30×4の大きさの行列を復元するには，つぎに示すように，重みの行列を右から掛けてやればよい。

$$
\begin{bmatrix} 1.77 & 0.47 & 1.87 \\ 1.56 & -0.56 & 1.54 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1.73 & 0.15 & -1.60 \end{bmatrix}
\overset{\text{重みの行列}}{\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix}}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1.77 & 0.47 & 1.87 & 1.12 \\ 1.56 & -0.56 & 1.54 & 0.50 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1.73 & 0.15 & -1.60 & -0.79 \end{bmatrix}
$$

この重みの行列の初めの3列は単位行列の形になっており，左辺の積を実行してみると，右辺には元の成績記録が得られる。

また，この成績記録の中にある情報の重複のもう一つの傾向に注意してみよう。これには，異なった成績の間の相関関係を図示してみるとわかり易いのであるが，数学期末テストの成績と国語期末テストの成積との間の相関は非常に低いのに対し，数学の期末テストと実力テストの間の相関関係は極めて高い。このことは，数学の期末テストの成績と実力テストの間には情報の重複があり，

* 電気工学科 教授
Professor, Electrical Engineering Division

表 2.1　30人の生徒の成績記録

生徒番号	数学 期末テスト	国語 期末テスト	数学 実力テスト	総合 成績
1	1.77	0.47	1.87	1.12
2	1.56	−0.56	1.54	0.50
3	1.51	1.02	1.27	1.27
4	1.29	1.26	1.54	1.28
5	1.29	0.07	1.38	0.68
6	0.87	0.15	0.55	0.51
7	0.60	−0.80	0.77	−0.10
8	0.23	0.71	0.16	0.47
9	0.18	−1.99	0.22	−0.91
10	0.07	−1.44	0.11	−0.69
11	−0.30	0.39	−0.06	0.05
12	−0.41	0.23	−0.39	−0.09
13	0.87	−0.64	0.05	0.12
14	−1.63	−0.01	−1.60	−0.82
15	1.03	−0.56	0.99	−0.24
16	0.98	−0.01	0.94	0.49
17	0.44	−0.41	0.49	−0.02
18	0.13	0.87	0.77	0.50
19	−0.09	2.14	−0.22	1.03
20	−0.25	−1.68	−0.17	−0.97
21	−0.51	0.23	−1.05	−0.14
22	−0.62	−1.04	−0.50	−0.83
23	−0.67	1.98	−0.83	0.66
24	−0.88	−0.41	−0.99	0.65
25	−0.88	−0.48	−1.05	−0.68
26	−0.99	−0.48	−0.44	−0.74
27	−1.15	1.02	−0.94	−0.07
28	−1.31	1.26	−1.44	−0.03
29	−1.41	−1.44	−1.38	−1.43
30	−1.73	0.15	−1.60	−0.79

一方の変量の値から他方の変量の値をかなり正確に推測することができることを示している。ここでは，数学の期末テストの値に回帰係数を掛けることにより，数学の実力テストの成績をほぼ満足すべき程度に推定できる。

この数値例では，簡単化のために総合成績以外の三つの変量については，それぞれ平均が0で標準偏差が1となるように標準化してある。そのため，相関係数がそのまま回帰係数となり，その値は0.96である。

そこで，もし若干の誤差が許されるとすれば，数学の実力テストの成績は，数学期末テストの成績に回帰係数0.96を掛けたものとすることができるから，成績記録の第3列も省略することができる。すなわち，二つの期末テストだけを残した成績記録に対し重み行列を乗じ，次式のように積を求めると，その第1，第2および第4列は元の成績記録の値と一致し，第3列は元の値とほぼ一致する。

$$\begin{bmatrix} 1.77 & 0.47 \\ 1.56 & -0.56 \\ \vdots & \vdots \\ -1.73 & 0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.96 & 0.5 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.77 & 0.47 & 1.70 & 1.12 \\ 1.56 & -0.56 & 1.50 & 0.50 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1.73 & 0.15 & -1.66 & -0.79 \end{bmatrix}$$

このやり方によると，若干の誤差は伴なうが，成績記録と重み行列の要素の総数は68となり，初めの成績記録の行列の要素の数120に比べて，かなり減少している。

これは，より少ない個体の数値で同じ情報を記録することができたことを示している。

初めの成績記録を行列 $\mathbf{Z}$ で表わし，二つの期末テストだけから成る行列を $\mathbf{F}$ とし，復元のための重み行列を

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.96 & 0.5 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{A}' \text{ は } \mathbf{A} \text{ の転置行列})$$

で表わすと，これらの間には

$$\mathbf{Z} \fallingdotseq \mathbf{F}\mathbf{A}' \qquad (2.1)$$

という関係が成り立つ。これを等号で表わすようにすると

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F}\mathbf{A}' + \mathbf{E} \qquad (2.2)$$

となる。ここで $\mathbf{E}$ は，(2.1) の両辺の差を要素とする行列を表わす。

上述の各行列は，因子分析モデルに対応させてつぎのように呼ばれる。初めの成績記録を表わす行列 $\mathbf{Z}$ をデータ行列，$N\times 2$ まで縮小された期末テストだけの行列 $\mathbf{F}$ を因子スコア行列という。この場合因子に当るものは，二つの期末テストである。また重みを要素とした行列 $\mathbf{A}$ を因子負荷行列という。(2.2) では，誤差を要素とする行列 $\mathbf{E}$ が用いられているが，これは，因子分析モデルにおける独自性成分に当るものである。

上の例では，因子としての変量は二つの期末テストであったが，一般に因子は，単に残されたものではなく，むしろ新たに設けられるものなのである。したがって，多変量の集約という観点から選ばれる変量としての因子は，その性質が明らかでない場合が多い。

また因子分析では，多数の変量によって示される変動傾向を同時に取り扱かうが，このときの変動の相互関係は，相関の概念によってよく説明される。そして変量ごとに標準化しておくと便利である。

すなわち，ある個体 i のある変量 j についての測定値を x_{ij} とし，x_{ij} の変量 j に関する平均を

$$\bar{x}_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ij} \qquad (j=1, 2, \ldots, n) \qquad (2.3)$$

で表わし，変量ごとの標準偏差を

$$\sigma_j=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2} \quad (j=1,2,\ldots,n) \quad (2.4)$$

で表わす。そうすると，これらを用いて標準スコア

$$z_{ij}=(x_{ij}-\bar{x}_j)/\sigma_j \quad (2.5)$$

が求められる。

2.2 基本モデル

因子分析モデルでは，実際に測定された変動が，いくつかの仮定された変動の1次結合によって表現される。すなわち，個体 i の変量 j に関する測定値は

$$z_{ij}=a_{j1}f_{i1}+a_{j2}f_{i2}+\cdots+a_{jm}f_{im}+d_ju_{ij} \quad (2.6)$$

と表わされる。ここで f_{ip} は，n 個1組の変量を表わすのに共通に用いられる仮説的変動を示すもので，これを**共通因子スコア**（略して**因子スコア**）と呼んでいる。これに対し，u_{ij} は n 個の変量のそれぞれに対応する固有の変動を表わすもので，**独自因子スコア**と呼んでいる。

共通因子スコアにかけられた重み a_{j1} は，その添字からわかるように，特定の個体によって定まるものではなく，各変量と各共通因子との関係を定める係数である。たとえば，a_{jp} についていえば，変量 j に因子 p がどれほど反映しているかということを示す係数とみることができる。これを**因子負荷**といっている。また独自因子スコアにかかる係数 d_j は，各変量の独自因子の重みを表わすもので，ふつうこれを2乗した d_j^2 をもって変量 j の**独自性**と呼んでいる。

因子分析モデルは，1組の変量の中にみられる変動の共通部分について，因子の構造を定めようとするモデルである。実際にはいずれの変量も，他の変量とは別の独自の変動を含むもので，この独自の変動 u_{ij} の中には，その変動の特殊な変動もあり，また測定の誤差ともいうべき変動分も含まれるであろう。

以上のことを，能力テストの例で説明すると，具体的な n 個のテストの得点が，m 個の仮定された変量（共通因子）の1次結合によって表わされるということになる。

すなわち，m 通りの基本能力とでもいうべきもののさまざまな重みづけによって，個々のテストの得点が決められるというように考えるのである。

因子スコアと呼ばれる仮定された変量は，観測された変量と同様に，因子ごとに標準化されたスコアで表わされ，それらの平均はいずれも0で，それらの分散はいずれも1である。さらに因子分析モデルでは，(2.6) の関係を構成するうえに，つぎのような制約を設けている。

まず，m 個の共通因子を表わす f_{ip} は，互に相関をもたないものとする。また，n 個の変量に対して想定された独自因子コスア u_{ij} についても，互に相関なく，また共通因子 f_{ip} のいずれとも相関のないことが仮定されている。

このような条件のもとで，(2.6) のような構造を定めようとする因子分析モデルでは，その実用上の目的から，共通因子の数 m をなるべく少なくとり，しかも独自因子負荷がなるべく小さくなることが望ましい。

さて，(2.6) には，個体 i の，変量 j について観測されたスコアの因子的構造を示したが，これを n 個の変量，N 個の個体について行列を用いて同時に表わすと

$$\mathbf{Z}=\mathbf{FA}'+\mathbf{UD} \quad (2.7)$$

となる。ここで $\mathbf{Z}$ はデータ行列と呼ばれ，行に個体をとり，列に変量をとった $N\times n$ の行列である。また因子スコア行列 $\mathbf{F}$ は，行に個体，列に因子をとった $N\times m$ の行列であり，因子負荷行列 $\mathbf{A}$ は $n\times m$ の行列である。また独自因子スコアの行列 $\mathbf{U}$ は $N\times n$ の行列で，これに掛けられている行列 $\mathbf{D}$ は，独自因子の重みを要素とする対角行列である。

因子分析の課題は，与えられた1組の変量に関するデータ行列を，(2.7) のような形で説明するために，因子負荷行列 $\mathbf{A}$ を求めることである。また必要に応じて，共通因子スコア $\mathbf{F}$ を求めることもある。この場合これを実行するに当っては，いくつかの難しい問題がある。その一つは，(2.7) の $\mathbf{UD}$ で示されている変動分，すなわち独自因子の成分が不明であるということである。この問題が片付いたとすると，共通因子スコアと因子負荷が求められることになるが，この両者は相互的に定まるものであって，可能な解は一つに限らない。そのため，与えられたデータ行列をどのような解に分析するのがよいかということも，因子分析の重要な課題の一つである。

2.3 相関行列

因子分析の理論的問題を取り扱かううえでも，実際の計算を実行するうえでも，変量間の相関行列は重要な意味をもっている。つぎに相関行列と因子分析の諸概念との関係を説明する。

変量間の相関係数を要素とする行列 $\mathbf{R}$（相関行列）は

$$\mathbf{R}=\frac{1}{N}\mathbf{Z}'\mathbf{Z} \quad (2.8)$$

によって与えられる。ここでは $\mathbf{Z}$ はデータ行列を表わす。これに (2.7) の基本式を代入すると

$$\mathbf{R}=\frac{1}{N}(\mathbf{FA}'+\mathbf{UD})'(\mathbf{FA}'+\mathbf{UD}) \quad (2.9)$$

となる。ここで，行列 $\mathbf{F}$ と行列 $\mathbf{U}$ はいずれも列ごとに標準化されており，また異なる因子の間では，その相関が0になるように定められている。したがって

共通因子間の相関：

$$\frac{1}{N}\mathbf{F}'\mathbf{F}=\mathbf{I}\ \text{（単位行列）} \quad (2.10)$$

共通因子と独自因子の間の相関：

$$\frac{1}{N}\mathbf{F}'\mathbf{D}=\mathbf{0}$$ （すべての要素を0とする行列）　(2.11)

独自因子間の相関：

$$\frac{1}{N}\mathbf{U}'\mathbf{U}=\mathbf{I} \qquad (2.12)$$

が成り立るから（.9）は

$$\mathbf{R}=\mathbf{A}\mathbf{A}'+\mathbf{D}^2 \qquad (2.13)$$

となる。なお本文では，因子スコアの直交条件（(2.10) 参照）を基にした直交解だけを考えることにする。

また，相関行列 $\mathbf{R}$ の対角要素から，対応する独自性を減じた行列を

$$\mathbf{R}^*=\mathbf{R}-\mathbf{D}^2 \qquad (1.14)$$

とすると

$$\mathbf{R}^*=\mathbf{A}\mathbf{A}' \qquad (2.15)$$

が得られる。

ところで，データは変量ごとに分散が1となるように標準化されているものとする。いま，変量ごとの分散を S_j^2 とすると

$$S_j^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}z_{ij}^2 \qquad (2.16)$$

上式に (2.6) の基本的関係を代入し整理すると，結局

$$S_j^2=h_j^2+d_j^2 \qquad (2.17)$$

という関係が得られる。ここで

$$h_j^2=a_{j1}^2+a_{j2}^2+\cdots+a_{jm}^2 \qquad (2.18)$$

である。この k_j^2 で表わされる部分は，各変量の変動に共通に含まれる因子に関係するもので，これを共通性と呼んでいる。これに対し，独自因子に関係のある分散の成分 d_j^2 を独自性といっている。仮定により $S_j^2=1$ であるから，次式が成り立つ。

$$h_j^2+d_j^2=1 \qquad (2.19)$$

$$1-d_j^2=h_j^2 \qquad (2.20)$$

もともと相関行列 $\mathbf{R}$ の対角要素には，すべて1が入っているから，(2.14) および (2.20) から，相関行列 $\mathbf{R}^*$ の対角要素には共通性 h_j^2 を入れればよいことがわかる。すなわち

$$\mathbf{R}^*=\begin{bmatrix} h_1^2 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & h_2^2 & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & h_n^2 \end{bmatrix}$$

(2.15) は因子分析の基本的な関係を表わすものである。もし，共通性 h_j^2 が推定できれば，相関行列 $\mathbf{R}^*$ が既知となり，(2.15) により因子負荷行列を求めることができる。

3. 因子分析の解

一般に，因子分析の解を求めるということは，相関行列から因子分析モデルに適合するような因子負荷行列を算出することを指している。因子として取り出される変動は，因子スコアによって直接表わされるのであるが，実際には，この因子と元の変量との関係を示す因子負荷が先に求められ，必要とあれば，これを用いて因子スコアが推定されることが多い。つぎに，この因子負荷の求め方について述べる。

因子負荷を求めるには，(2.15) に示したように，対角要素に共通性を入れた相関行列を二つの因子負荷行列に分解する。ところが一つの相関行列に対し，因子分析モデルを満足する因子負荷は，1組の解だけに限られず，無数に存在する。したがって，実際に因子負荷を求めるときには，単に (2.15) を満足するというばかりでなく，何らかの他の制約条件を設ける必要がある。その条件の相違によって，得られる解はそれぞれ特徴あるものとなる。その中で最も重要と思われる主因子法についてつぎに概要を述べる。

主因子法による解は，相関行列から直接算出される因子解であって直交解である。その特徴は，第1因子から順次，その因子負荷の平方和が最大となるように解を求めることである。この特徴を言いかえると，多変量の間に共通にみられる変動のうち，どの変量にも比較的多く含まれる共通の変動を取り出して因子とするという方法である。

この解法では，因子負荷行列

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

において，まず第1因子の寄与，すなわち因子負荷の平方和

$$V_1=a_{11}^2+a_{21}^2+\cdots+a_{n1}^2 \qquad (3.2)$$

を最大とするように第1因子を求める。

ところで，因子負荷行列 $\mathbf{A}$ は (2.15) に示した条件

$$\mathbf{R}^*\mathbf{A}\mathbf{A}'$$

を満たすものでなければならない。これを行列の各要素を用いて表わすと

$$r_{jk}=\sum_{p=1}^{m}a_{jp}a_{kp} \qquad (j, k=1, 2, \ldots, n) \qquad (3.3)$$

となる。ここで相関行列 $\mathbf{R}^*$ は (2.14) により

$$\mathbf{R}^*=\mathbf{R}-\mathbf{D}^2$$

であり，$\mathbf{R}^*$ の対角要素には共通性 h_j^2 が入っている。

このような条件のもとで V_1 を最大とする解を求めるためには，ラグランジュの方法を用いる。まず条件 (3.3) を用いて

$$T=V_1-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_{jk}\left(\sum_{p=1}^{m}a_{jp}a_{kp}-r_{jk}\right) \qquad (3.4)$$

なる値を考える。ここで μ_{jk} はラグランジュの乗数とい

われる未知数である。そして，この T の値の極値を与える因子負荷を求めるのである。すなわち，T を各 a_{jp} について偏微分し，それをすべて0とする。

$$\frac{\partial T}{\partial a_{jp}}=0 \qquad (j=1, 2, \ , n ; p=1, 2,.. , m)$$

これらをまとめて整理すると，一般式として

$$\sum_{k=1}^{n} r_{jk}a_{k1}-\lambda_1 a_{j1}=0 \qquad (j=1, 2,.. , n) \quad (3.5)$$

が得られる。ここで λ_1 は

$$\lambda_1=\sum_{j=1}^{n} a_{j1}^2 \qquad (3.6)$$

を表わす。これは，求めようとする解の寄与すなわち最大とされた寄与を示している。

(3.5) は，1組 n 個のつぎの連立方程式を表わす。

$$\left.\begin{array}{l}(h_1{}^2-\lambda_1)a_{11}+r_{12}a_{21}+r_{13}a_{31}+\cdot\cdot+r_{1n}a_{n1}=0\\ r_{21}a_{11}+(h_2{}^2-\lambda_1)a_{21}+r_{23}a_{31}+\cdots+r_{2n}a_{n1}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_{n1}a_{11}+r_{n2}a_{21}+r_{n3}a_{31}+\cdots+(h_n{}^2-\lambda_1)a_{n1}=0\end{array}\right\} \quad (3.7)$$

あるいは行列の記法で

$$\mathbf{R}^*\mathbf{a}_1-\lambda_1\mathbf{a}_1=0 \qquad (3.8)$$

と表わされる。この方程式は

$$a_{11}=a_{21}=\cdots=a_{n1}=0$$

という解をもつが，これは，すべての因子負荷が0という特殊な解で意味がない。(3.7) がこれ以外に解をもつための必要十分条件は，この連立方程式の係数から成る行列式が0となることである。すなわち

$$|\mathbf{R}^*-\lambda_1\mathbf{I}|=0 \qquad (3.9)$$

一般に，与えられた行列 $\mathbf{R}^*$ に対し，連立方程式 (3.8) を満足させる λ_1 のことを，$\mathbf{R}^*$ の固有値と呼び，これに対応する1組の解 $a_{11}, a_{21},\cdots, a_{n1}$ のことを固有ベクトルと呼んでいる。主因子法の因子負荷は，このように相関行列 $\mathbf{R}^*$ の固有ベクトルとして与えられる。したがってこれを求めるには，固有ベクトルを求める一般的手続によればよい。ただし (3.8) を満足する固有ベクトルとしては，そのノルムを自由に選ぶのではなく，(3.6) にあるように

$$\mathbf{a}_1{}'\mathbf{a}_1=\lambda_1 \qquad (3.10)$$

となるように定める必要がある。

ふつう，固有値，固有ベクトルを求める計算プログラムでは，固有ベクトルの大きさを，ノルムが1になるように規準化することが多い。このように規準化された固有ベクトルを $\mathbf{q}_1$ で表わすと，因子負荷ベクトルは
として与えられる。

$$\mathbf{a}_1=\sqrt{\lambda_1}\mathbf{q}_1$$

第1因子負荷のベクトル $\mathbf{a}_1$ が求まれば，つぎに第2因子負荷を求める。まず第1残差相関行列

$$\mathbf{R}_1{}^*=\mathbf{R}^*-\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1{}' \qquad (3.12)$$

を求める。これは，各要素については

$$r'_{ij}=r_{jk}-a_{j1}a_{k1} \qquad (3.13)$$

となる。この残差相関行列を用いて，第2因子の寄与

$$V_2=a_{12}^2+a_{22}^2+\cdot \ +a_{n2}^2 \qquad (3.14)$$

を最大とする解を求めればよい。以下，必要な数の因子負荷が，同様な手順によって求められる。

数値例として，**表3.1**の相関行列を用いて主因子解を求めてみる。この相関行列の対角要素には，共通性の推定値が入っているが，この推定値は，SMC と呼ばれる方法によって求められたものである（後記の補注参照)。

この相関行列から得られた主因子解を，**表3.2**に示す。

表 3.1 対角要素に SMC による共通性の推定値を入れた相関行列

.787								
.818	.719							
.796	.717	.692						
.051	.189	.084	.577					
.169	.171	.155	.649	.612				
.258	.288	.247	.637	.710	.640			
.026	.125	.076	.287	.134	.123	.591		
.309	.307	.317	.119	.185	.050	.614	.590	
.087	.090	.249	.129	.149	.190	.659	.623	.613

表 3.2 主因子法による因子解

変量	因子負荷				
	I	II	III	IV	V
1	.709	−.583	−.067	−.004	−.045
2	.717	−.469	−.076	.172	.038
3	.699	−.476	.017	−.134	.047
4	.476	.488	−.386	.154	.039
5	.527	.427	−.445	−.062	−.115
6	.577	.336	−.496	−.108	.058
7	.442	.422	.517	.138	.056
8	.566	.143	.537	.035	−.129
9	.482	.339	.543	−.178	.059
因子寄与	3.090	1.634	1.454	.139	.047

主因子法による解は，これよりもっと解釈しやすい解へ変換するための初期解として，求められることが多い。しかし，これ自身を一つの結果として解釈することもある。たとえば，もともと1因子的性格をもつものと想定される知能検査の項目間の相関行列を，主因子法によって分析したときには，最も中心的な共通因子が，どの程度の割合で見られるかは重要なことである。これは，第

1因子の寄与を比較することによって知られる。

補注 SMCによる共通性の推定

ある変量と他の変量との相関は，両者の間の共通因子によって説明される。ある一つの変量の共通性は，その相関行列を作っている変量の中で相関の最も高いものを選ぶと，その相関の値に近いことが予想される。SMCによる共通性の推定は，この考えをさらに進めたものである。

SMCとは重相関係数の平方 (squared multiple correlation) の略称であって，重相関係数とは一般に，二つ以上の変量の1次結合としてできる合成変量と，他のもう一つの変量との相関で，しかもこれが最大となるように1次結合の重みを選んだ場合のものを意味している。そこで，ある一つの変量の共通性を他の変量との相関によって推定するとき，他の変量として，当該変量以外の $n-1$ 個の変量すべてを用いるのが，SMCによる共通性の推定である。

$n-1$ 個の変量による変量 j の推定では，$n-1$ 個の変量への適当な重みづけ

$$\hat{z}_{ij}=v_{1j}z_{i1}+v_{2j}z_{i2}+\cdots+v_{nj}z_{in} \quad (\text{ただし } v_{jj}=0)$$

によって，この合成変量が，変量 j と最も高い相関を示すように求められる。したがって，変量 j に対する共通性は，その変量と他の $n-1$ 個の変量との間の重相関係数の平方として与えられる。すなわち

$$\hat{h}_j{}^2=R^2_{j\cdot n-1}$$

このような推定値を，n 個の変量についてそれぞれ算出するわけであるが，そのとき，重相関係数を別々に計算するのではなく

$$R^2_{j\cdot n-1}=1-\frac{1}{r_{jj}{}^{(-1)}}$$

という関係を利用すると都合がよい。ここで，$r_{jj}{}^{(-1)}$ は相関行列 $\mathbf{R}$（対角要素を1とするもの）の逆行列の j 番目の対角要素を表わす。なお共通性の推定には，SMCによる方法のほか，いろいろの方法が工夫されている。

4. 因子の変換

一つの因子負荷行列 $\mathbf{A}$ が与えられているとき，これに適当な変換を施して新しい因子負荷行列 $\mathbf{B}$ を作ると，これもまた同じ相関行列に対する因子解となる。したがって，この変換を行なうときに，必要な条件を満たすようにすれば，任意の解から特定の目的に適った解を得ることができる。

因子の変換は，変換行列 $\mathbf{T}$ によって表わされる。因子スコア $\mathbf{F}$ に変換 $\mathbf{T}$ を施して得られる新しい因子スコアを $\mathbf{G}$ とすると

$$\mathbf{G}=\mathbf{FT} \qquad (4.1)$$

となる。$\mathbf{T}$ が

$$\mathbf{T}'\mathbf{T}=\mathbf{I} \qquad (4.2)$$

という正規直交行列であるときには，この新しい因子もやはり直交因子で，その負荷行列 $\mathbf{B}$ は

$$\mathbf{B}=\mathbf{AT} \qquad (4.3)$$

によって表わされる。これを直交変換あるいは直交回転と呼んでいる。この変換によって (2.7) は

$$\mathbf{Z}=\mathbf{GB}'+\mathbf{UD} \qquad (4.4)$$

となり，共通因子を表わす因子スコアと因子負荷が初めのものと異なっているが，因子分析の基本モデルを満たしている。

このような変換を実際に行なうときには，大体つぎの2通りの目的があると考えられる。その一つは，他の根拠によってあらかじめ仮定された因子構造を目標とし，それにどれほどよく合致するかを検討するための変換である。その二は，そのような外部的な情報は無く，与えられた因子構造を，より解釈しやすい構造へと変換するもので，いわゆる単純構造への変換はその最も重要なものである。ここではまず単純構造について説明し，ついで単純構造への変換について述べる。

4.1 単純構造

因子構造を表わす因子負荷は，相関行列に示された変量間の複雑な関係を，より少数の数値で説明するパラメータであると考えることができる。この因子構造が単純になるということは，それだけ因子分析モデルの中で，このパラメータと因子との関係が単純になることを意味する。

ある因子に対し，一群の変量がとくに高い因子負荷をもち，他の変量はこれとは逆に0に近い因子負荷しか示さず，かつ中程度の大きさの因子負荷を示す変量がないとき，このような因子の構造を単純構造と呼ぶ。このような負荷のパターンをもつとき，その因子は，因子負荷のとくに高い一群の変量の測定内容と密接な関係にあるものと予想され，他の因子負荷の低い変量による変動と切り離して解釈することができる。

たとえば，**表4.1**に示したように，二つの異なった解による第1因子負荷があったとする。左側の因子のパターンIでは，いずれの変量にも相関のある変動が因子に定められているため，変量の間の内容的な差異と関係づけて因子を説明することがむずかしい。これに対し，因子負荷が右側の欄 (II) のようになったとすると，因子負荷のとくに大きな1，2，3の変量のみが，この因子と高い相関関係にあり，4以下の五つの変量とはほとんど相関のないことが判るから，因子も変量1，2，3に共通する変動を表わすものとして説明しやすくなる。

表 4.1　二つの異なった解による特徴的な因子パタン

変　量	因 子 負 荷 I	因 子 負 荷 II
1	.708	.911
2	.716	.858
3	.698	.838
4	.477	.054
5	.527	.121
6	.577	.245
7	.443	.021
8	.566	.311
9	.482	.094

4.2　単純構造への変換——規準バリマックス法

初期値として与えられた因子負荷を，直交変換して単純構造を求める解析的方法のうち，最もよく知られ，また実際に利用されることも多いバリマックス回転法について述べる。

この方法ではバリマックス基準として，因子負荷の平方の，因子ごとの分散をとり，その和をとったものを用いる。すなわち

$$V=\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(b_{jp}^2-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_{kp}^2\right)^2\right\} \tag{4.5}$$

バリマックス回転とは，このバリマックス基準を最大とするように因子負荷行列を変換することである。このように，因子負荷の平方の分散を最大とすることは，因子負荷の正負にかかわらず，因子負荷の絶対値の大きなものと小さいものとが顕著に現われるようにすることで，これが単純構造の一つの数学的表現になっているのである。

回転バリマックス法は，正規直交行列により変換によって行なわれる。ここでは Kaiser の提案にならって，平面内での回転に基づく方法を説明する。まず m 因子の中から任意の2因子を選び，この2因子の間で単純構造を求める変換を行なう。

いま，二つの因子 p, q によって定まる平面上での回転を角 θ で表わすことにすると，この回転のための変換行列 $\mathbf{T}_{pq}$ は

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & p\text{列} & & q\text{列} & \\ & & \downarrow & & \downarrow & \end{array} \\ \mathbf{T}_{pq}= & \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cos\theta & \cdots & -\sin\theta & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \sin\theta & \cdots & \cos\theta & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow p\text{行} \\ \\ \leftarrow q\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \tag{4.6}$$

となる。これは，大きさ $m\times m$ の単位行列の pp, qp, pq, qq の各要素を，それぞれ $\cos\theta$, $\sin\theta$, $-\sin\theta$, $\cos\theta$ によっておきかえたもので，三角関数の性質から

$$\mathbf{T'T}=\mathbf{I} \tag{4.7}$$

となることがわかる。

この変換行列を，m 因子から成る因子負荷行列 $\mathbf{A}$ に掛けて

$$\mathbf{B}=\mathbf{AT}_{pq} \tag{4.8}$$

とすると，回転後の因子負荷行列では，その p 列と q列が

$$\left.\begin{aligned} b_{jp}&=a_{jp}\cos\theta+a_{jq}\sin\theta \\ b_{jq}&=-a_{jp}\sin\theta+a_{jq}\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

のように変換をうけるが，その他の列は変化せず

$$b_{jr}=a_{jr} \qquad (r\neq p, q) \tag{4.10}$$

である。

ここで問題となるのは，どのような θ の値を選ぶかであるが，これに対しては，この変換によって影響をうける p 因子と q 因子のみについてバリマックス基準を考え，これに (4.9), (4.10) を代入し，この基準を最大とする θ の値を求めればよい。結局，p, q 因子に関する θ の値は

$$\tan 4\theta_{pq}=\frac{D-2AB/n}{C-(A^2-B^2)/n} \tag{4.11}$$

となる。ここで，A, B, C, D はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} A&=\sum_{j=1}^{n}(a_{jp}^2-a_{jq}^2) \\ B&=2\sum_{j=1}^{n}a_{jp}a_{jq} \\ C&=\sum_{j=1}^{n}(a_{jp}^2-a_{jq}^2)^2-4\sum_{j=1}^{n}(a_{jp}a_{jq})^2 \\ D&=4\sum_{j=1}^{n}(a_{jp}^2-a_{jq}^2)a_{jp}a_{jq} \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

である。ところで，$0<4\theta<\pi/2$ の場合と $-\pi<4\theta<-\pi/2$ の場合とでは，$\tan 4\theta$ の値は同じとなるため，どちらの θ を選ぶかについては，別の条件を考えなくてはならない。

上述のように，バリマックス基準に基く回転が任意の2因子による平面内で行なわれたら，つぎに同様の操作を，他の因子の組合せについても実行する。そして，m 因子から選ばれた2因子のすべての組合せについて，このような回転を行ない一巡させる。しかし，これだけでは解が収束しないことがある。このようなときには，必要な精度の収束が得られるまで何回も因子の組合せを繰り返して計算する必要がある。

なお，ふつう用いられるバリマックス法は，以上述べた解とは若干違っている。上述のバリマックス法では，その結果に因子の寄与の大きな偏りが現われることがわかった。すなわち，この方法で回転して求められた因子

解では，因子ごとにとった負荷の平方和

$$\sum_{j=1}^{n} b_{jp}^2 \qquad (p=1, 2, .., m)$$

が，ある因子についてはとくに大きく，他のある因子についてはより小さくなってしまう。(4.5) のバリマックス基準では，因子負荷の２乗の値が回転に影響を与えているが，共通性の大きい変量では，平均的に各因子の負荷も大きく，それだけ回転に大きな影響を与えることが予想される。そこで，すべての変量の因子負荷を，それぞれの共通性の逆数によって規準化してからこのバリマックス回転を行なうことにすれば，因子負荷のとくに大きい変量が，回転に与える影響を抑制することができる。

このような考えから，変換を始める前に因子負荷の値を，それぞれ対応する変量の共通性の平方根 h_j で割って規準化する。

初めの解を $\mathbf{A}_0$ とすると，規準化された因子負荷行列は

$$\mathbf{A}=\mathbf{H}^{-1/2}\mathbf{A}_0 \tag{4.13}$$

となる。ここで，$H^{-1/2}$ は $1/h_j$ を対角要素にもつ対角行列を表わす。このとき得られた変換行列を $\mathbf{T}$ とすると，これによって得られる解は

$$\begin{aligned}\mathbf{B}&=\mathbf{AT}\\ &=\mathbf{H}^{-1/2}\mathbf{A}_0\mathbf{T}\end{aligned} \tag{4.14}$$

となる。この両辺に左から $\mathbf{H}^{1/2}$ を掛けると

$$\mathbf{H}^{1/2}\mathbf{B}=\mathbf{A}_0\mathbf{T}=\mathbf{B}_0 \tag{4.15}$$

表 4.2　規準バリマックス法による因子負荷

変　量	因子負荷		
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
1	.916	.079	.049
2	.841	.154	.093
3	.828	.081	.153
4	.012	.771	.139
5	.094	.800	.093
6	.196	.808	.040
7	−.018	.140	.788
8	.265	.033	.747
9	.067	.096	.792
寄　与	2.353	1.953	1.871

となる。したがって，規準化した因子負荷行列 $\mathbf{A}$ を変換して行列 $\mathbf{B}$ が得られたとすれば，(4.15) に示すように，左から共通性の平方根をそれぞれ対応する要素に掛けて，規準化の分だけ元に戻すことが必要である。

一般に，回転バリマックス法というと，この規準バリマックスの解を指すことが多い。

ここでは，計算の手順の説明は省略し，簡単な数値例の結果だけを示す。いま，９個の変量の間の相関行列を因子分析して，**表3.2**のような主因子解が与えられたとする。このうち初めの３因子をとり，規準バリマックス法によって回転すると，**表4.2**のような因子負荷が得られる。この二つの解を比べるとわかるように，規準バリマックス法による解は明らかに単純構造を示している。

5. あとがき

以上の記述は，因子分析法で重要と考えられる部分の一部を概説したにすぎない。このほか，因子スコアの推定，因子数の決定および因子の斜交変換などいくつかの重要な問題がある。また，本文では応用面についてほとんど触れることができなかった。これらについては他日に譲りたい。

因子分析を適用する場合，１組の変量に１回だけ適用して，その結果からすぐに最終的な解釈をすることは好ましくない。変量については，それまでに得た経験や資料から，あるいは測定内容の理論的検討から，その因子構造の概略をつかみ，当面の研究目的に照してふさわしいと思われる変量を選んで用いることが大切である。

因子分析法の利用については，現在はっきりした形成が定まっているわけではない。各種の問題に応用するには，独自の変形も必要と考えられる。

参 考 文 献

1) 池田　央：因子抽出の統一原理，心理学研究，**35**巻，(1965)
2) 浅野長一郎：因子分析の諸法とそれらの特性，**9**巻，４号，数理科学 (1971)
3) 奥野忠一他：多変量解析法，日科技連出版社 (1971)
4) 浅野長一郎．因子分析法通論，共立出版 (1971)
5) 清水・斎藤‥因子分析法，日本文化科学社 (1968)
6) 芝祐順：行動科学における相関分析法，東大出版会 (1975)
7) Harman, H. H.,　Modern factor analysis (1967).
8) Lawley, D. N. & Maxwell, A. E.,　Factor analysis as a statistical method (1963)